# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(DURÉE : 4 heures)

---

Pour tout nombre réel $t \geqslant -1$, on pose :

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + t \cos^2 \varphi}\, d\varphi .$$

I. 1° Calculer F (− 1) et F (0).

I. 2° Montrer que, pour tout $t > -1$, on a l'identité :

$$F(t) = \sqrt{1+t}\, F\left(\frac{-t}{1+t}\right).$$

I. 3° Montrer que, si $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, on a :

$$0 \leqslant F(t_2) - F(t_1) \leqslant \frac{t_2 - t_1}{4}.$$

I. 4° Montrer que, si $-1 < t < 0$, on a :

$$0 \leqslant F(t) - F(-1) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{1+t}.$$

I. 5° Montrer que la fonction $t \longmapsto F(t)$ est continue en tout point $t_0 > -1$, et continue à droite au point $t_0 = -1$.

I. 6° Trouver un équivalent simple de F($t$) quand $t \to +\infty$.

II. 1° Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $0 < b \leqslant a$. Exprimer à l'aide de la fonction F la longueur L du quart d'ellipse qui, dans un repère orthonormé $Oxy$ du plan euclidien, a pour équations paramétriques :

$$x = a \cos \varphi , \qquad y = b \sin \varphi ; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

II. 2° Montrer l'inégalité :

$$L \leqslant a + \frac{\pi}{4} b .$$

II. 3° Parmi les ellipses d'aire donnée, caractériser celles qui ont le plus petit périmètre.

II. 4° Montrer l'inégalité

$$L \geqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{a\,b},$$

et en déduire une inégalité remarquable pour F ($t$) quand $-1 < t \leqslant 0$.

Tournez la page S. V. P.

III. 1° En utilisant le développement classique de $(1 + u)^{1/2}$ en série entière convergente pour $| u | < 1$, écrire un développement en série de $\sqrt{1 + t \cos^2 \varphi}$ valable pour $| t | < 1$, et pour tout $\varphi$ réel.

III. 2° En admettant que le développement ainsi trouvé peut être intégré terme à terme entre 0 et $\pi/2$ par rapport à la variable $\varphi$, montrer que, pour $| t | < 1$, l'on a :

$$F(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left[ \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6....(2k)} \right]^2 \frac{t^k}{2k-1}.$$

III. 3° Pour $a = 2$ et $b = \sqrt{3}$, donner une valeur décimale approchée de la longueur L (définie au II. 1°), avec une erreur inférieure à $10^{-3}$, en justifiant soigneusement la précision obtenue.

III. 4° Pour $| t | < 1$, montrer que $F(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$t(1 + t) \frac{d^2F}{dt^2} + (1 + t) \frac{dF}{dt} - \frac{1}{4} F(t) = 0.$$

IV. Dans cette dernière partie, on se propose d'établir des inégalités plus fines que celles du I. 4° et du II. 2°.

IV. 1° Montrer qu'en posant, pour tout $\lambda$ réel tel que $0 < \lambda < 1$,

$$I(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\lambda + \sin \varphi} d\varphi,$$

on a, pour $-1 < t < 0$,

$$F(t) - F(-1) \leqslant \frac{2}{\pi} (1 + t) I(\sqrt{1 + t}).$$

IV. 2° Calculer $I(\lambda)$.

IV. 3° Montrer que la longueur L du quart d'ellipse de demi-axes $a$ et $b$ défini au II. 1° vérifie l'inégalité :

$$L \leqslant a + \frac{b^2}{a^2} \left[ \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{Log} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} + \frac{\pi}{2} b - a \right].$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail